Aspectos gerais da distribuição Gamma, $\Gamma(x;\alpha,\beta)$

Resumo

Dentre as distribuições de densidade de probabilidade contínuas mais usuais a distribuição gamma, $\Gamma(x;\alpha,\beta)$, exibe particularidade interessante para a variável aleatória associada a ela: muda sua morfologia de modo drástico a depender das escolhas sobre α. Além disso, a distribuição Qui-quadrado, $\chi^2(x;\nu)$, e a distribuição exponencial, outras distribuições bastante usuais em problemas de estatística e análise de dados, tratam de casos particulares da distribuição gamma. Em razão deste papel, este trabalho de divulgação apresentará aspectos gerais sobre esta específica distribuição de densidade de probabilidade.

1 Apresentação e resultados descritivos

Dada uma variável aleatória X, com observáveis definidos no corpo dos números reais positivos, R^+, com parâmetros α e β também definidos no corpo dos números reais positivos e diferentes de zero, a distribuição densidade de probabilidade $f(x;\alpha,\beta)$, chamada de gamma, é escrita como:

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}, & x\geq 0;\\ \\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{1}$$

Onde $\Gamma(\alpha)$ é conhecida como função gamma e expressa pela equação:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy. \tag{2}$$

Uma propriedade interessante da equação (2), que pode ser verificada diretamente pela integração por partes, é que $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, podendo ser aplicado de modo sucessivo.

Na situação em que $\alpha\in N^*$, fica evidenciada a propriedade $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots\Gamma(1)=(\alpha-1)!$; recebendo a função gamma a denominação vulgar de "função fatorial"[1].

Um resultado bastante usual é $\Gamma(\frac{1}{2})=\pi^{1/2}$, obtido pelo cálculo da expressão (2) com $\alpha=1/2$ e a substituição de variável de integração.

Os parâmetros α e β recebem as denominações de *parâmetro de forma* e de *parâmetro de escala*, respectivamente. Isto porque o elemento responsável pela alteração da forma da distribuição (1) é o parâmetro α na função gamma incompleta[2].

Na imagem que segue, figura (1), é apresentado gráfico com diversas distribuições gamma com parâmetros de forma distintos e parâmetro de escala fixado em $\beta=2$.

[1]Quando α é definido no corpo dos números naturais diferente de zero a função gamma realmente tem em seu conjunto imagem os mesmos resultados do fatorial de $(\alpha-1)$; contudo, de modo mais geral, a função gamma tem α definido nos $R-\{Z^*_-\}$ e, assim, detém conjunto imagem com mais elementos do que o fatorial de um número natural. Eis, pois, não ser correto chamar a função gamma de "função fatorial".

[2]Por *função gamma incompleta, i.e.* $\Gamma(x;\alpha)$, é definida a mesma expressão em (2), contudo com o limite superior de integração colocado em x qualquer e não no infinito.

Para o caso específico onde $\beta = 2$ e $\alpha = \nu/2$, para $\nu \in N^*$, se tem a distribuição Qui-quadrado, χ^2, para número de graus de liberdade ν.

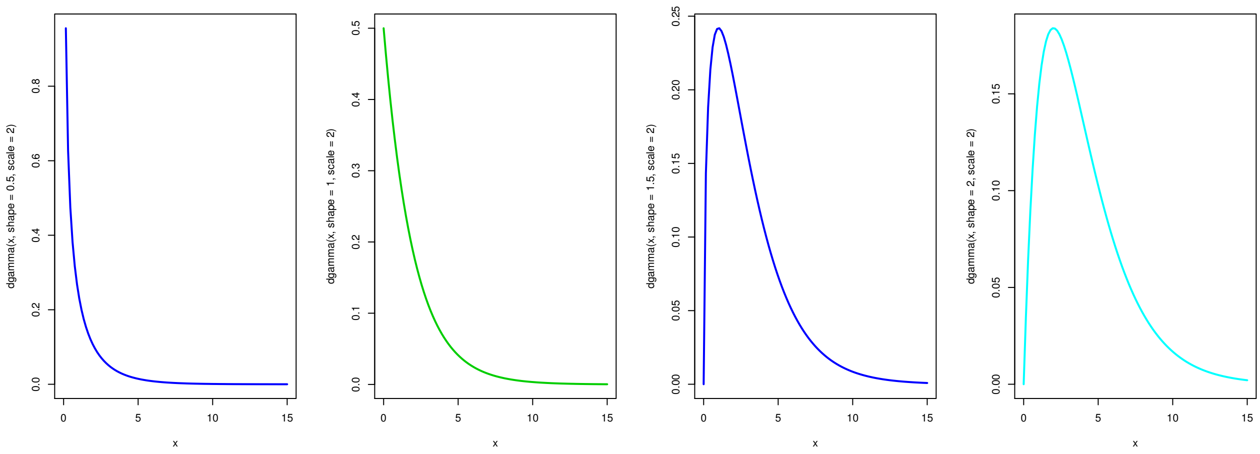

Figura 1: Distribuição gamma para diversos parâmetros de forma α e $\beta = 2$.

Tendo a variável aleatória X uma distribuição de densidade de probabilidade gamma, a média $E[X]$ é dada por:

$$E[X] = \int_0^\infty x f(x;\alpha,\beta)dx = \alpha\beta; \tag{3}$$

cujo resultado é obtido pelo cálculo direto mediante substituição de variável e o uso da propriedade $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

A variância da variável aleatória X neste contexto, $VAR(X)$, é dada por

$$VAR(X) = \int_0^\infty (x - E[X])^2 f(x;\alpha,\beta)dx = E[X^2] - E[X]^2 = \alpha\beta^2; \tag{4}$$

que, como antes, é obtida pelo cálculo direto com o uso de substituição de variável e o uso da propriedade geral da função Γ.

De modo geral os momentos da distribuição gamma, $E[X^k]$, podem ser expressos pela relação de recorrência obtida através do cálculo direto:

$$E[X^k] = \beta^k \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{5}$$

Ou, de modo muito mais simples, pode ser utilizada a função geradora dos momentos da distribuição, $M_X(t)$,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx; \tag{6}$$

que fornece como resultado após cálculo direto a expressão

$$M_X(t) = (1 - t\beta)^{-\alpha}. \tag{7}$$

Qualquer momento da distribuição pode, então, ser obtido pelas derivadas da função geradora em razão de

$$E[X^k] = \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} M_X(t)\bigg|_{t=0}. \tag{8}$$

De (5) e (8) pode ser obtida a relação de translação discreta para a função gamma por número inteiro e positivo k, que é escrita como

$$\Gamma(\alpha+k) = \left(\frac{1}{\beta^k} \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} (1-t\beta)^{-\alpha} \bigg|_{t=0} \right) \Gamma(\alpha). \tag{9}$$

Esta última equação explicita o domínio da função como aquele do conjunto dos números reais retirados os números inteiros negativos além de zero, i.e. $R^* - Z^-$. Isto porque, tratando k de número inteiro positivo e não estando a função $\Gamma(0)$ definida na origem; dado qualquer valor de α inteiro e negativo, sempre será possível encontrar uma translação discreta que encaminha para $\Gamma(0)$, demonstrando que os números inteiros negativos também não estão no domínio da função.

Quanto à moda da distribuição gamma, x_m, esta está definida apenas para $\alpha > 1$, onde $f'(x_m) = 0$; desse modo, derivando a equação (1),

$$f'(x_m;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x_m^{\alpha-1} e^{-\frac{x_m}{\beta}} \left[\frac{\alpha-1}{x_m} - \frac{1}{\beta} \right] = 0; \tag{10}$$

que, para $\alpha > 1$ e qualquer valor de x_m, resulta $x_m = (\alpha-1)\beta$ como a moda da distribuição.

Sobre a medida de obliquidade da distribuição, dada a definição dela:

$$Ob = \frac{E[(X-E[X])^3]}{VAR(X)^{3/2}}; \tag{11}$$

e fazendo uso da relação de recorrência para os momentos da distribuição em (5), chega-se pelo cálculo direto à expressão da obliquidade da distribuição gamma, dada finalmente por:

$$Ob = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}; \tag{12}$$

notando ser ela sempre positiva para qualquer valor de $\alpha > 0$ e, por consequência, com forma deformada no sentido de apresentar a calda mais para o sentido positivo do eixo.

Outro coeficiente de uso comum é a curtose, que é definida por

$$Cs = \frac{E[(X-E[X])^4]}{VAR(X)^2}; \tag{13}$$

podendo ser calculado diretamente e com o auxílio da relação de recorrência (5), que resulta na expressão final

$$Cs = 3 + \frac{6}{\alpha}. \tag{14}$$

Pela expressão (14) vê-se que a curtose da distribuição gamma é sempre maior do que a curtose da distribuição normal, onde $Cs = 3$, recebendo a classificação de ser *leptocúrtica*. Isto indicando que a concentração sobre a moda na distribuição gamma é mais forte do que na distribuição normal, ou em outras palavras, que as caldas da distribuição decaem em ritmo maior em relação à distribuição normal.

2 Entropia de Shannon

A entropia associada a uma distribuição f de uma variável aleatória X pode ser interpretada como uma medida da falta de informação sobre o fenômeno e é definida como

$$\mathcal{H}[f] = -E[\ln f(x;\alpha,\beta)] = -\int_0^\infty dx f(x;\alpha,\beta)\ln f(x;\alpha,\beta); \tag{15}$$

que no presente caso é explicitamente escrita

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[f] &= -\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}\ln\left[\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}\right]dx \\ &= \alpha + \ln\beta + \ln\Gamma(\alpha) + (1-\alpha)\psi(\alpha); \end{aligned} \tag{16}$$

com $\psi(\alpha)$, chamada de *função digamma*, definido por

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\ln y\, dy. \tag{17}$$

3 Estimadores - Máxima log-verossimilhança

Em situações práticas de trabalho deseja-se estimar os parâmetros da distribuição, α e β, da população através de uma amostra aleatória. Seja então uma variável aleatória X relacionada com a distribuição gamma e a amostra obtida aleatoriamente de n elementos: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$.

A função log-verossimilhaça geradora dos estimadores é expressa por

$$l(\alpha,\beta|X) = \ln L(\alpha,\beta|X); \tag{18}$$

onde $L(\alpha,\beta|X) = \prod_{j=1}^n f(x_j;\alpha,\beta)$.

Desse modo, a expressão (18) é reescrita na forma:

$$\begin{aligned} l(\alpha,\beta|X) &= \sum_{j=1}^n \ln f(x_j;\alpha,\beta) \\ &= -n(\alpha\ln\beta + \ln\Gamma(\alpha)) + (\alpha-1)\sum_{j=1}^n \ln x_j - \tfrac{1}{\beta}\sum_{j=1}^n x_j. \end{aligned} \tag{19}$$

Antes de proceder com o desenvolvimento da expressão (19) é interessante apresentar outra propriedade da função gamma relacionada com sua derivada de primeira ordem em relação à α, que pode ser obtida pelo cálculo direto, recordando que $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, então:

$$\Gamma'(\alpha) = \Gamma(\alpha-1) + (\alpha-1)\Gamma'(\alpha-1); \tag{20}$$

e dividindo por $\Gamma(\alpha)$, leva ao resultado:

$$\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \psi(\alpha-1) + \frac{1}{\alpha-1}, \tag{21}$$

sendo a função $\psi(\alpha)$ aquela mesma definida em (17) e cujo nome é dado por *função digamma*.

De conhecimento de (20), o estimador de log-verossimilhança para o parâmetro β é obtido pela obtenção do extremo da expressão (19), ou seja,

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta|X)}{\partial\alpha} = \sum_{j=1}^{n} \ln x_j - n(\psi(\alpha) + \ln\beta) = 0; \tag{22}$$

que resulta como estimador de β a expressão:

$$\hat{\beta} = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln x_j - \psi(\hat{\alpha})\right). \tag{23}$$

Já para a obtenção do estimador α segue-se o mesmo procedimento com a procura do extremo para β, isto é

$$\frac{\partial l(\alpha,\beta|X)}{\partial\beta} = \frac{1}{\beta^2}\sum_{j=1}^{n} x_j - n\frac{\alpha}{\beta} = 0; \tag{24}$$

que com o uso do resultado (23) chega-se finalmente à equação do estimador para o parâmetro α:

$$\hat{\alpha}\, e^{-\psi(\hat{\alpha})} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j}{\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\frac{1}{n}}}. \tag{25}$$

Obviamente que a expressão (25) não fornece diretamente uma estimativa para $\hat{\alpha}$ através dos observáveis x_j da amostra; métodos numéricos são necessários para a aproximação do lado esquerdo da equação.

Uma possível possibilidade, para ilustração, de obter numericamente $\hat{\alpha}$ é considerar a expansão abaixo e solucionar o problema numérico de se obter as raízes reais e positivas do polinômio:

$$\hat{\alpha} e^{-\psi(\hat{\alpha})} \approx 1 + \frac{1}{2\alpha} + \frac{5}{4\cdot 3!\alpha^2} + \frac{3}{2\cdot 4!\alpha^3} + \frac{47}{48\cdot 5!\alpha^4} + \cdots \tag{26}$$

Com aobtenção de $\hat{\alpha}$ pode-se voltar para (23) e estimar o valor de $\hat{\beta}$.

4 Estimadores - Mínimos Quadrados

Outra técnica de gerador de estimadores é a minimização da expressão da diferença quadrática para algum resultado conhecido a respeito da distribuição, como média e variância.

Considere uma variável aleatória X e o conjunto de m amostras de n elementos, $x_{m,1}, x_{m,2}, x_{m,3}, \ldots x_{m,n}$, então a função da soma quadrática do erro em relação à média é

$$M_{\bar{X}}(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{m}\left(E[X]-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^2; \tag{27}$$

onde é sabido que $E[X]=\alpha\beta$ e minimizada a equação para algum dos parâmetros, chega-se ao resultado

$$\frac{\partial M_{\bar{X}}(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=0 \quad\longrightarrow\quad \hat{\alpha\beta}=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}. \tag{28}$$

Expressão similar seria obtida se o parâmetro minimizado fosse β. Trata, portanto, de estimador para a média e não para os parâmetros da distribuição.

Para poder se ter uma estimativa dos parâmetros, poder-se-ia valer de outro resultado teórico conhecido da distribuição gamma, como a variância das amostras anteriores, $VAR(X)=\alpha\beta^2$. Assim

$$M_{VAR(X)}(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{m}\left(mE[(X_i-E[X_i])^2]-\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}{n-1}\right)^2. \tag{29}$$

Minimizando a equação (29) para quaisquer parâmetros, chega-se à conclusão que

$$\frac{\partial M_{VAR(X)}(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=0 \quad\longrightarrow\quad \hat{\alpha\beta^2}=\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}_i^2; \tag{30}$$

onde $\hat{\sigma}_i^2$ é a variância não viesada da *i-ésima* amostra que aparece em (29).

Usando os resultados obtidos em (28) e (30), os estimadores para a média e a variância, chegam-se aos estimadores para os parâmetros α e β; quais sejam:

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{(mn)^2}\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}_i^2} \qquad\qquad \hat{\beta}=nm\frac{\sum_{i=1}^{m}\hat{\sigma}_i^2}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}}. \tag{31}$$

A diferença óbvia entre os métodos de log-verossimilhança e mínimos quadrados é que no primeiro se necessitou retirar apenas uma única amostra teste, já no segundo foram necessárias m amostras testes.

5 Estimadores - Momentos

A técnica mais simples de obtenção de estimadores para os parâmetros da distribuição é através dos momentos da amostra, como a média amostral e a variância amostral. Tome a amostra de n elementos da variável X.

O estimador do primeiro momento é a própria média, que pode ser escrito

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=n\hat{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{n}x_i\longrightarrow\hat{\alpha\beta}=\mu=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}. \tag{32}$$

Novamente, o primeiro momento da distribuição não é suficiente para a determinação dos seus dois parâmetros, sendo necessário o uso do segundo momento, i.e. a variância. Considere μ o primeiro momento e a variância amostral não viesada, então

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{n-1}\right]=\alpha\hat{\beta}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{n-1}. \tag{33}$$

Desse modo, fazendo uso de (32) e (33) são obtidos os estimadores para os parâmetros, sendo eles escritos:

$$\hat{\alpha}=\frac{n-1}{n^2}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\longrightarrow\hat{\beta}=\frac{n}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}. \tag{34}$$

6 Distribuição quadrática de erros como χ^2

A distribuição χ^2 trata de caso particular da distribuição gamma, onde $\alpha=\nu/2$ e $\beta=2$, para ν correspondendo aos graus de liberdade e expresso por números inteiros maiores que zero.

Pelo teorema do limite central, sabe-se que a variável aleatória Z dos erros no entorno da média está associada sempre a uma distribuição gaussiana, que sempre pode ser parametrizada como $N(0,1)$. Desse modo, a variável aleatória Z^2 corresponderá ao erro quadrático e pode ser mostrado que a distribuição associada a Z^2 não é uma distribuição normal, mas sim uma distribuição χ^2.

Para tal, tome uma única variável $Z^2=Y$ para ser mostrado que a distribuição de Y é $\chi^2_{\nu=1}$. Considere também a função acumulada $F_Y(y)=P(Y\leq y)$.

Pela definição de função acumulada $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(Z^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq Z\leq\sqrt{y})$. No entanto, a última igualdade diz respeito à distribuição normal no intervalo compreendido entre $-\sqrt{y}$ e $\sqrt{y}$; que também pode ser escrita como $F_Y(y)=F_Z(\sqrt{y})-F_Z(-\sqrt{y})$.

Derivando a função acumulada em relação à y para ser obtida a função densidade de probabilidade, constata-se

$$F'_Y(y)=f_Y(y)=\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)f_Z(\sqrt{y})-\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)f_Z(-\sqrt{y})=\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)f_Z(\sqrt{y}); \tag{35}$$

onde foi utilizado o fato $f_Z(-y)=f_Z(y)$ da simetria da distribuição normal.

Fazendo uso da distribuição normal $N(0,1)$ definida para f_Z, chega-se diretamente ao resultado

$$f_Y(y)=\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)f_Z(\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}\rightarrow\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, \tag{36}$$

que é justamente a distribuição gamma para os parâmetros $\alpha=\nu/2$ e $\beta=2$, onde $\nu=1$ na situação.

No entanto, a demonstação acima diz respeito a uma única variável aleatória Z^2 e, na situação usual de trabalho com análises de erros quadráticos, aquilo trabalhado é a função somatória de ν-diferenças quadráticas; de modo melhor:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{\nu}Z_i^2; \tag{37}$$

cabendo, pois, uma demonstração mais geral.

Para isso, considere o vetor de variáveis aleatórias com distribuição normal no espaço Euclidiano de ν dimensões dado por $\vec{\zeta} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu)$.

A função acumulada de probabilidade da norma do vetor $\vec{\zeta}$ pode ser entendida como a função acumulada do espaço amostral de $\vec{\zeta}$ com restrição em subconjuntos de vetores com norma $|\vec{\zeta}| = \rho$. Em outras palavras,

$$F_{|\vec{\zeta}|}(\rho) = F_{\vec{\zeta}}(\vec{\zeta})\Big|_{|\vec{\zeta}|=\rho}. \tag{38}$$

Observando que os subconjuntos definidos pela mesma norma formam o espaço de uma hiperesfera em ν dimensões, assim a equação (38) pode ser colocada como

$$\begin{aligned} F_{|\vec{\zeta}|}(\rho) = & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}} \int_{0 \le Z_1^2 + z_2^2 + \cdots + Z_\nu^2 \le \rho^2} \cdots \int dV^{(\nu)} e^{-\frac{1}{2}(Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_\nu^2)} \\ = & \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^\rho R^{\nu-1} e^{-\frac{R^2}{2}} dR \end{aligned} \tag{39}$$

onde foi utilizado o elemento da hiper-área de uma hiperesfera em ν dimensões.

Se $Y = \chi^2 = |\vec{\zeta}|^2$, então $F_{\chi^2}(y) = P(\zeta^2 \le y) = P(\zeta \le \sqrt{y}) = F_{|\vec{\zeta}|}(\sqrt{y})$, o que leva em conjunto com a equação (39) ao resultado

$$f_{\chi^2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} F'_{|\vec{\zeta}|}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} y^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, \tag{40}$$

mostrando finalmente que a distribuição para o somatório dos quadrados de variáveis aleatórias normais é uma distribuição χ^2 com parâmetro ν e $\beta = 2$.

Para finalizar esta seção cabe ser salientado na expressão (37) que ν corresponde a $n-1$, onde n é o número de elementos da amostra. Isto porque a soma de χ^2 trata de resíduos quadráticos no entorno da média e, assim sendo, a definição deste momento cria vínculo de dependência, existindo apenas $n-1$ elementos independentes para serem somados.

Os resultados aqui apresentados esclarecem a razão do porquê em teoria de erros se trabalhar com distribuições normais junto às medidas do experimento, mas com distribuição χ^2 para os resíduos quadráticos delas.

7 Exemplo para discussão - Maxwell-Boltzmann

Para contextualizar a distribuição gamma num sistema físico real, tome a distribuição acumulada de Maxwell-Boltzmann de velocidades para um gás ideal em equilíbrio termodinâmico na temperatura T, com partículas idênticas não interagentes de massa m, i.e.

$$F(y) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^y v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \tag{41}$$

Nitidamente é visto na expressão anterior que não trata de uma distribuição gamma a função acumulada de probabilidade para a velocidade das partículas que formam o gás. Todavia, para simplificar a notação, considere $\beta = kT$ e recorde que $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; então

$$F(y) = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{3}{2})\beta^{\frac{3}{2}}} \int_0^y v^2 e^{-\frac{mv^2}{2\beta}} dv. \tag{42}$$

Com a mudança de variável $E = \frac{mv^2}{2}$ a função acumulada de probabilidade (42) passa a ser escrita não mais em função das velocidades, mas em função da energia; de modo mais claro:

$$F(E_y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})\beta^{\frac{3}{2}}} \int_0^{E_y} E^{\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{E}{\beta}} dE, \tag{43}$$

ou como densidade de probabilidade:

$$f(E) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})\beta^{\frac{3}{2}}} E^{\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{E}{\beta}}, \tag{44}$$

que justamente trata de uma função densidade da família gamma com os parâmetros $\alpha = \frac{\nu}{2}$, com $\nu = 3$, e $\beta = kT$. Ou seja, a distribuição de energia cinética num gás ideal segue uma distribuição da família gamma e alguns resultados clássicos podem ser verificados diretamente como: a energia cinética média de uma partícula igual a $< E >= \frac{3}{2}kT$, por (3), e um maior adensamento energético em $< \bar{E}_m >= \frac{1}{2}kT$, por (10).

O fato de $\nu = 3$ está relacionado ao número de graus de liberdade que uma partícula pode se movimentar no espaço tridimensional, havendo a possibilidade da energia total ser partida em três movimentos independentes dentro dele.

Já o parâmetro β se mostra atrelado à temperatura do sistema, sendo uma propriedade intensiva e ligada à energia média das partículas; está portanto vinculado ao grau de agitação.

ARTIGO-28-AGO-18.pdf

Documento número #d4391017-46d3-4864-8f5b-7cd187450f30

Assinaturas

Flávio Henrique Severino Oliveira Vieira
Assinou

Log

27 Ago 2018, 08:48:14	Operador com email lino.henry@gmail.com na Conta 3ecfc2a2-8dc0-4859-aeab-ae67fb0e14cc criou este documento número d4391017-46d3-4864-8f5b-7cd187450f30. Data limite para assinatura do documento: 26 de Setembro de 2018 (23:59). Finalização automática após a última assinatura: habilitada. Idioma: Português brasileiro.
27 Ago 2018, 08:51:10	Operador com email lino.henry@gmail.com na Conta 3ecfc2a2-8dc0-4859-aeab-ae67fb0e14cc adicionou à Lista de Assinatura: LINO.HENRY@GMAIL.COM, para assinar, com os pontos de autenticação: email (via token); Nome Completo; CPF; Data de Nascimento; endereço de IP.
27 Ago 2018, 08:53:30	Flávio Henrique Severino Oliveira Vieira assinou. Pontos de autenticação: email LINO.HENRY@GMAIL.COM (via token). CPF informado: 042.531.026-46. IP: 187.121.58.232. Componente de assinatura versão 1.19.0 disponibilizado em https://app.clicksign.com.
27 Ago 2018, 08:53:30	Processo de assinatura finalizado automaticamente. Motivo: finalização automática após a última assinatura habilitada. Processo de assinatura concluído para o documento número d4391017-46d3-4864-8f5b-7cd187450f30.

Hash do documento original (SHA256): 17eb0ca49c53a75d89931c26dc2a7986b09484782430612f2020b4fdb3227f27